

Robotik I im WS 2016/17

Musterlösungen zum 3. Übungsblatt

Prof. Dr.-Ing. Tamim Asfour
Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Dillmann
Dr.-Ing. Nikolaus Vahrenkamp
Dipl.-Inform. Manfred Kröhnert
Dipl.-Inform. Peter Kaiser
M.Sc. Fabian Paus
M.Sc. Jonas Beil
Adenauerring 2, Geb. 50.20
Web: <http://h2t.anthropomatik.kit.edu>

Lösung 1

(Differentielle Inverse Kinematik)

1. Berechnung der Jacobi-Matrix

Die Funktion für die Position des Endeffektors ist gegeben als

$$f(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -500\sin(\theta_2)\cos(\theta_3) - 500\cos(\theta_2)\sin(\theta_3) - 500\sin(\theta_2) \\ 500\cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - 500\sin(\theta_2)\sin(\theta_3) + 100 + 500\cos(\theta_2) \\ d_1 \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix berechnet sich als

$$J(\mathbf{q}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial d_1} & \frac{\partial f}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -500\cos(\theta_2 + \theta_3) - 500\cos(\theta_2) & -500\cos(\theta_2 + \theta_3) \\ 0 & -500\sin(\theta_2 + \theta_3) - 500\sin(\theta_2) & -500\sin(\theta_2 + \theta_3) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Invertieren der Jacobi-Matrix ergibt

$$J^{-1}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{500} \frac{\sin(\theta_2 + \theta_3)}{\sin(\theta_3)} & \frac{1}{500} \frac{\cos(\theta_2 + \theta_3)}{\sin(\theta_3)} & 0 \\ \frac{1}{500} \frac{\sin(\theta_2 + \theta_3) + \sin(\theta_2)}{\sin(\theta_3)} & \frac{1}{500} \frac{-\cos(\theta_2 + \theta_3) - \cos(\theta_2)}{\sin(\theta_3)} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Singularitäten

Die Jacobi-Matrix ist singulär für $\theta_3 = 0^\circ, 180^\circ$. Die inverse Matrix existiert für diese Gelenkwinkelstellungen nicht.

Lösung 2

(Dynamikmodellierung nach Lagrange)

Für unseren Roboter gelten folgende vereinfachende Annahmen:

1. m_1 und m_2 sind als Punktmassen in der Mitte der entsprechenden Armsegmente definiert,
2. das zweite Armsegment s_2 ist ein dünner Stab mit einem vernachlässigbaren Radius,
3. in dem System gibt es keine Reibung,
4. der Roboter ist auf einer Höhe von $h = 0$ installiert.

Die Bewegungsgleichung kann nach der Methode von Lagrange entsprechend folgender Formel ermittelt werden:

$$\tau = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$$

mit der Lagrange-Funktion:

$$L = E_{kin} - E_{pot}.$$

1. Kinetische Energie für s_1 und s_2

Für s_1 ergibt sich aus der Translationsgeschwindigkeit $\dot{d}$ folgende kinetische Energie:

$$E_{kin,1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{d}^2.$$

Für s_2 ergibt sich aus der Translationsgeschwindigkeit $(\dot{x}_2, \dot{y}_2)$ und Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ folgende kinetische Energie:

$$\begin{aligned} E_{kin,2} &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

Basierend auf der Annahme, dass s_2 ein dünner Stab sei mit Masseschwerpunkt in der Mitte von s_2 , ist das Trägheitsmoment J folgendermaßen gegeben:

$$J = \frac{1}{12} m_2 l_2^2.$$

Eingesetzt in $E_{kin,2}$ ergibt sich:

$$E_{kin,2} = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2. \quad (1)$$

x_2 und y_2 abgeleitet nach der Zeit ergeben die Translationsgeschwindigkeiten $\dot{x}_2$ und $\dot{y}_2$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \dot{d} - \dot{\theta} \frac{1}{2} l_2 \sin(\theta), \\ \dot{y}_2 &= \dot{\theta} \frac{1}{2} l_2 \cos(\theta).\end{aligned}$$

Eingesetzt in Gleichung 1 ergibt sich als kinetische Energie für das zweite Armsegment:

$$E_{kin,2} = \frac{1}{2} m_2 \dot{d}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{4} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_2 l_2 \dot{\theta} \dot{d} \sin(\theta) + \frac{1}{24} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2.$$

2. Potentielle Energie für s_1 und s_2

Für den allgemeinen Fall, dass sich der Ursprung des Roboters auf einer Höhe von $h > 0$ befindet, kann die potentielle Energie mit dem Gravitationsvektor g für s_1 wie folgt beschrieben werden:

$$E_{pot,1} = m_1 g h.$$

Entsprechend gilt für s_2

$$E_{pot,2} = m_2 g \left(h - \frac{1}{2} l_2 \sin(\theta) \right).$$

Aus $h = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}E_{pot,1} &= 0 \\ E_{pot,2} &= -m_2 g \frac{1}{2} l_2 \sin(\theta).\end{aligned}$$

3. Lagrange-Funktion und deren Ableitungen

Die Lagrange-Funktion setzt sich aus der kinetischen und potentiellen Energie für s_1 und s_2 entsprechend folgender Regel zusammen:

$$L = E_{kin,1} + E_{kin,2} - E_{pot,1} - E_{pot,2}.$$

L wird mittels vorheriger Ergebnisse wie folgt beschrieben:

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{d}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{4} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_2 l_2 \dot{\theta} \dot{d} \sin(\theta) + \frac{1}{24} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2 + m_2 g \frac{1}{2} l_2 \sin(\theta).$$

Die Bewegungsgleichung setzt sich aus den beiden Komponenten τ_1 und τ_2 zusammen, zu deren Bestimmung die folgenden Ableitungen bestimmt werden müssen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{d}}, \frac{\partial L}{\partial d}, \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}, \frac{\partial L}{\partial \theta}.$$

Die Ableitungen von L für das Translationsgelenk mit dem Stellsignal d sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}} &= (m_1 + m_2)\dot{d} - \frac{1}{2}m_2l_2\dot{\theta}\sin(\theta) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}} &= (m_1 + m_2)\ddot{d} - \frac{1}{2}m_2l_2(\ddot{\theta}\sin(\theta) + \dot{\theta}\dot{\theta}\cos(\theta)) \\ \frac{\partial L}{\partial d} &= 0.\end{aligned}$$

Die Ableitungen von L für das Rotationsgelenk mit dem Stellsignal θ sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{4}m_2l_2^2\dot{\theta} - \frac{1}{2}m_2l_2\dot{d}\sin(\theta) + \frac{1}{12}m_2l_2^2\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{4}m_2l_2^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m_2l_2(\ddot{d}\sin(\theta) + \dot{d}\dot{\theta}\cos(\theta)) + \frac{1}{12}m_2l_2^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2}m_2l_2\dot{d}\cos(\theta) + \frac{1}{2}m_2l_2g\cos(\theta).\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für τ_1 und τ_2 :

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}} - \frac{\partial L}{\partial d} \\ &= (m_1 + m_2)\ddot{d} - \frac{1}{2}m_2l_2\sin(\theta)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m_2l_2\cos(\theta)\dot{\theta}^2 - 0 \\ \tau_2 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{4}m_2l_2^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m_2l_2\ddot{d}\sin(\theta) - \frac{1}{2}m_2l_2\dot{d}\dot{\theta}\cos(\theta) + \frac{1}{12}m_2l_2^2\ddot{\theta} - (-\frac{1}{2}m_2l_2\dot{d}\cos(\theta) + \frac{1}{2}m_2l_2g\cos(\theta)) \\ &= \frac{1}{3}m_2l_2^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m_2l_2\sin(\theta)\ddot{d} - \frac{1}{2}m_2l_2g\cos(\theta).\end{aligned}$$

Die allgemeine Form der Bewegungsgleichung unter Vernachlässigung von Reibung lautet:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

Die Massenträgheitsmatrix M erhält man durch das Zusammenfassen aller Terme die von $\ddot{\mathbf{q}}$ abhängen. Im Vektor $\mathbf{c}$ (Zentripetal- und Corioliskomponenten) werden alle Terme zusammengefasst, die sowohl von $\dot{\mathbf{q}}$ und $\mathbf{q}$ abhängen. Im Vektor $\mathbf{g}$ werden alle Terme zusammengefasst, in denen Gravitationskomponenten enthalten sind

Damit lässt sich die Bewegungsgleichung wie folgt beschreiben:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & -\frac{1}{2}m_2l_2\sin(\theta) \\ -\frac{1}{2}m_2l_2\sin(\theta) & \frac{1}{3}m_2l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{d} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m_2l_2\dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}m_2l_2g \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die generalisierten Kräfte τ_1 und τ_2 haben unterschiedliche Einheiten. τ_1 ist eine Kraft (Einheit: Newton), während τ_2 ein Drehmoment ist (Einheit: Newtonmeter).

Lösung 3

(Laplace-Transformation mittels Integral)

Die LaPlace-Transformation ist nur für $t \geq 0$ definiert. Um sicher zu stellen, dass diese Bedingung erfüllt ist, wird $f(t)$ mit der Einheitssprungfunktion $\sigma(t)$ multipliziert.

$$f(t) = \sin(\omega t) \sigma(t)$$

Die Sinusfunktion wird nun in die komplexe Darstellung überführt:

$$f(t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \sigma(t).$$

Das Integral um eine Gleichung vom Zeitbereich in den Frequenzbereich zu überführen lautet allgemein:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

Mit der komplexen Sinusfunktion lautet es:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty (e^{-(s-i\omega)t} - e^{-(s+i\omega)t}) dt \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{-e^{-(s-i\omega)t}}{s-i\omega} + \frac{e^{-(s+i\omega)t}}{s+i\omega} \right]_0^\infty. \end{aligned}$$

Mit der Überlegung, dass sich $e^{-(s\pm i\omega)t} = e^{-st} \cdot e^{\mp i\omega t}$ als Produkt einer konvergenten Funktion e^{-st} mit $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$, und einer divergenten, aber beschränkten Funktion $e^{\mp i\omega t} = \cos(\mp \omega t) + i \sin(\mp \omega t)$ schreiben lässt, folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s\pm i\omega)t} = 0$

Daraus ergibt sich als Lösung des Integrals:

$$\begin{aligned} F(s) &= F(s)_\infty - F(s)_0 \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{2i\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$